УДК 517.917

© **С. Ф. Николаев, Е. Л. Тонков, И. В. Феклистов**

СТАБИЛИЗАЦИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ДВУХ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК, СОЕДИНЁННЫХ ЖЁСТКОЙ ТЯГОЙ НУЛЕВОЙ МАССЫ[1]

Эта работа продолжает исследование динамики управляемой механической системы (см. рис. 1), начатое в [1]. Здесь m_i — масса i-ой материальной точки, g — ускорение свободного падения, $r_i = (x_i, y_i)$ — координаты точки m_i в инерциальной системе координат, $w = (w_1, w_2)$ — вектор управляющих сил, $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ — возмущающая сила, приложенная к точке m_2 Выберем управление $w = (w_1, w_2)$ в виде $w_1 = v_1 - f_1(t)$, $w_2 = v_2 - f_2(t)$, где $v = (v_1, v_2)$ — новое управление. Предполагается, что точки m_i жестко связаны тягой нулевой массы длины l и колебания системы происходят в плоскости XOY.

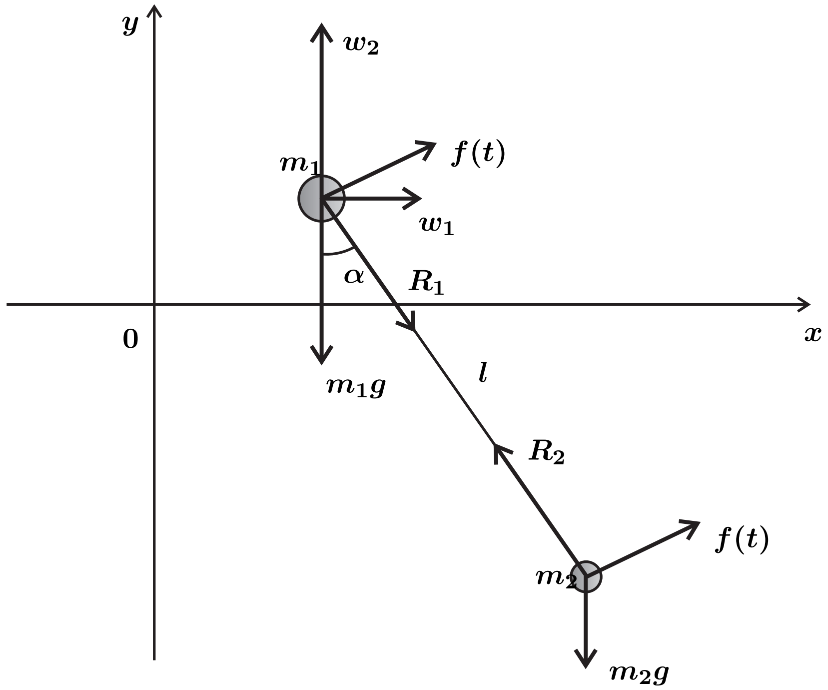

Рис 1. Материальные точки, соединенные жесткой тягой.

Поскольку механическая системы имеет жесткую связь, то число степеней свободы равно трём. Это позволяет нам записать уравнения Лагранжа [2, Глава 3, § 1] в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \Phi_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

где $q_1 = x_1$, $q_2 = y_1$, $q_3 = \alpha$ — обобщенные силы, $\dot q = (\dot q_1, \dot q_2, \dot q_3)$ — обобщенные скорости, T — кинетическая энергия, Φ_i — обобщенные силы. Так как $T = \dfrac{m_1(\dot x_1^2 + \dot y_1^2)}{2} + \dfrac{m_2(\dot x_2^2 + \dot y_2^2)}{2}$, то $T = \dfrac{m(\dot x_1^2 + \dot y_1^2)}{2} + \dfrac{m_2}{2}\big(l^2\dot\alpha^2 + 2l\dot\alpha(\dot x_1\cos\alpha + \dot y_1\sin\alpha)\big)$, где $m = m_1 + m_2$ и уравнения (1) притмут вид

$$\begin{cases} m\ddot x_1 + (m_2 l\cos\alpha)\ddot\alpha - m_2 l\dot\alpha^2\sin\alpha & = \Phi_1, \\ m\ddot y_1 + (m_2 l\sin\alpha)\ddot\alpha + m_2 l\dot\alpha^2\cos\alpha & = \Phi_2, \\ (m_2 l\cos\alpha)\ddot x_1 + (m_2 l\sin\alpha)\ddot y_1 + m_2 l^2\ddot\alpha & = \Phi_3. \end{cases} \tag{2}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 06–01–00258).

Здесь $\Phi_1 = v_1 + f_1(t)$, $\Phi_2 = v_2 - mg + f_2(t)$, $\Phi_3 = -m_2 gl\sin\alpha + l(f_1(t)\cos\alpha + f_2(t)\sin\alpha)$.

Выберем $v_1 = u_1 - f_1(t)$, $v_2 = u_2 + mg - f_2(t)$, где u_1 и u_2 — новые управления. Тогда

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (m_2 l\cos\alpha)\ddot{\alpha} - m_2 l\dot{\alpha}^2\sin\alpha = u_1, \\ m\ddot{y}_1 + (m_2 l\sin\alpha)\ddot{\alpha} + m_2 l\dot{\alpha}^2\cos\alpha = u_2, \\ (m_2 l\cos\alpha)\ddot{x}_1 + (m_2 l\sin\alpha)\ddot{y}_1 + m_2 l^2\ddot{\alpha} - lf_1(t)\cos\alpha - l(f_2(t) - m_2 g)\sin\alpha = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Перейдём в (3) к безразмерным координатам, выбрав в качестве характерных масштабов массу, длину и ускорение g, а для t в качестве масштаба примем величину $t_* = \sqrt{l/g}$. После стандартных преобразований получим следующую систему

$$\begin{cases} (1+m)\ddot{x} + (m\cos\alpha)\ddot{\alpha} - m\dot{\alpha}^2\sin\alpha = u_1, \\ (1+m)\ddot{y} + (m\sin\alpha)\ddot{\alpha} + m\dot{\alpha}^2\cos\alpha = u_2, \\ m(\ddot{x}\cos\alpha + \ddot{y}\sin\alpha + \ddot{\alpha}) - f_1(t)\cos\alpha - h(t)\sin\alpha = 0, \end{cases}$$

где $m = m_2/m_1$, $h(t) = f_2(t) - m$.

Предположим, что задана траектория $(t, p(t))$ движения точки (x, y). Тогда система уравнений в отклонениях $x \to x - t$, $y \to y - p(t)$, $\alpha \to \alpha$ запишется в виде

$$\begin{cases} (1+m)\ddot{x} + (m\cos\alpha)\ddot{\alpha} - m\dot{\alpha}^2\sin\alpha = v_1, \\ (1+m)\ddot{y} + (m\sin\alpha)\ddot{\alpha} + m\dot{\alpha}^2\cos\alpha = v_2, \\ m(\ddot{x}\cos\alpha + \ddot{y}\sin\alpha + \ddot{\alpha}) = f_1(t)\cos\alpha + (h(t) - m\ddot{p}(t))\sin\alpha, \end{cases} \tag{4}$$

где $v_2 = u_2 - (1+m)p(t)$.

Движение системы (4) назовем *идеальным*, если найдется такое управление (v_1, v_2), что система имеет тривиальное решение. Идеальное движение существует в том и только в том случае, если $f_1(t) \equiv 0$. Таким образом, при идеальном движении точка m_1 осуществляет заданное движение и при этом отсутствует «раскачивание» точки m_2 относительно m_1. Если возмущение $f_1(t)$ отлично от нуля, то идеальное решение отсутствует. В предположении, что $f_1(t)$ мало отличается от нуля и обладает свойством возвращаемости (например, $f_1(t)$ рекуррентно), в системе возникают малые колебания, которые могут быть неустойчивыми.

Доклад посвящён построению допустимого позиционного управления, минимизирующего отклонение колебательного движения от нуля и превращающего его в устойчивое движение.

Список литературы

1. Николаев С. Ф., Тонков Е. Л., Феклистов И. В. Колебания двух материальных точек, соединённых жёсткой тягой // Известия Института математики и информатики УдГУ. Ижевск. 2006. Вып. 2(36). С. 201–204.
2. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.:Физматлит, 2001. 320 с.

Николаев Сергей Федорович
Удмуртский государственный ун-т,
США, Калифорния
e-mail: me@cvmlib.com

Тонков Евгений Леонидович
Удмуртский государственный ун-т
Россия, Ижевск
e-mail: eltonkov@udm.ru

Феклистов Игорь Вячеславович
Удмуртский государственный ун-т,
Россия, Москва
e-mail: artclimate@rambler.ru